TD Analyse locale et asymptotique

Négligeabilité

Q1Z **Exercice 1** Simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{1}{x^2} + o_0(\frac{1}{x^2}) + 3 + \frac{1}{x} + o_0(\frac{1}{x})$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o(\frac{1}{2^n}) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n})$

OGP **Exercice 2** Comparer les suites suivantes pour la relation de négligeabilité en $+\infty$.

1. n^n
2. e^{n^2}
3. $n^{\ln n}$
4. $(\ln n)^{n \ln n}$

Équivalents

E4C **Exercice 3** Donner un équivalent aussi simple que possible de

1. $\cos t - 1$ en 0
2. $\cos t$ en 0
3. $\frac{1}{(3x-1)(x+1)}$ en $+\infty$
4. e^{x+1} en $+\infty$
5. $\ln(2x+1)$ en 0
6. $\ln(2x+1)$ en $+\infty$
7. $\sin 2x - \tan x$ en 0
8. $\ln \sqrt{1+\sin(x+x^2)}$

DJ8 **Exercice 4** Déterminer les limites suivantes

1. $\ln(1+2x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$ en 0
2. $\frac{(1-\cos x)\arctan x}{x \tan x}$ en 0
3. $\frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{3x^3+x^4}$ en 0

Y4C **Exercice 5** Déterminer des équivalents aussi simples que possible quand $n \to +\infty$ de

1. $\frac{1}{n+2}$
2. $e^{n+\frac{1}{n}}$
3. $2^n \sin \frac{3}{2^n}$
4. $\ln \frac{n^2-5n+1}{n^2-1}$
5. $\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n})}$
6. $\binom{n+r}{r}$, pour $r \in \mathbb{N}$
7. $\ln \sin \frac{1}{n}$
8. $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

5FV **Exercice 6** On suppose $f, g > 0$, $f(x) \sim_a g(x)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

1. On suppose $\ell = +\infty$. Montrer que $\ln f(x) \sim_a \ln g(x)$.
2. Pour quelles limites $\ell \in \mathbb{R}_+$ le résultat précédent persiste-t-il ?

L1Z **Exercice 7** Déterminer un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

PRM **Exercice 8** ★ Soit (s_n) une suite décroissante positive telle que $s_n + s_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Montrer que $s_n \sim \frac{1}{2n}$

F20 **Exercice 9** ★ Soit (u_n) une suite vérifiant $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Soit $v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
   a) En majorant la suite $(v_{n+1} - v_n)$, montrer que (v_n) converge, vers une limite α.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le \alpha - v_n \le \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
2. Montrer que $u_n \sim e^{\alpha 2^n}$.

… de sommes et d'intégrales

XDO **Exercice 10** Donner des équivalents, quand $n \to +\infty$, des sommes

1. $\sum_{k=1}^n k^2$
2. $\sum_{k=1}^n e^k$
3. $\sum_{k=1}^n \ln k$
4. $\sum_{k=1}^n k!$

AP4 **Exercice 11** Déterminer un équivalent simple des quantités suivantes, quand $x \to +\infty$.

1. $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. ★ $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

Indication : *2. Conjecturer une expression, et majorer la différence.* *3. Faire deux IPPs.*

DL

MGZ **Exercice 12** Déterminer des $DL_3(0)$ de

1. $\ln(1+2x)\sin x$
2. $xe^{-x}\sqrt{1+2x}$
3. $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1+2x}$
4. $\frac{\ln(1+x)}{x}e^{-2x}$

2K6 **Exercice 13** Déterminer le

1. $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\ln(1+x)}$
2. $DL_2(0)$ de $\ln(1+e^{2x})$
3. $DL_2(0)$ de $e^{\frac{1}{1+x}}$
4. $DL_3(0)$ de $e^{\frac{x}{1-x}}$
5. $DL_2(0)$ $\frac{\cos x \ln(1-x)}{\sin x}$

YPY **Exercice 14**
1. En composant deux DL, retrouver un $DL_2(0)$ de $(1+x)^\alpha$.
2. En déduire un équivalent de $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$, quand $n \to +\infty$.

FQ2 **Exercice 15** En développant le produit, ou en utilisant un DL_1/DL_2 de $(1+x)^m$, déterminer des

1. $DL_4(0)$ de $(x+2x^3)^3$
2. $DL_5(0)$ de $(x+x^2+2x^3)^4$
3. $DL_5(0)$ de $(\sin x)^3$

REG **Exercice 16** Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de

1. $\frac{\sin\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}$
2. $n(\ln(n+1) - \ln n)$
3. $n^2(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}})$.
4. $(\cos\frac{1}{n})^n$
5. $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
6. $(n^2+1)^\alpha - (n^2-1)^\alpha$.

Z2E **Exercice 17** Déterminer un $DL_3(0)$ de $\tanh x$.

50M **Exercice 18** Déterminer les limites suivantes

1. $\frac{\sin(x\ln x)}{x}$ en 0
2. $\frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$ en 0
3. $\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$ en $+\infty$

3Y7 **Exercice 19** Soient $a,b>0$ et $f\colon x\mapsto (\frac{a^x+b^x}{2})^{1/x}$. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

On peut par ailleurs montrer que f est croissante.

CL6 **Exercice 20** Donner des équivalents simples de

1. $\sqrt{x}-2$ en 4
2. t^3-t^2-t-2 en 2
3. $\cos t$ en $\frac{\pi}{2}$.
4. $\frac{\ln(1-x^2)}{\ln x}$ en 1^-

X0R **Exercice 21** ★ Déterminer un équivalent de

1. $\frac{\pi}{2}-\arctan x$, en $+\infty$.
2. $\arccos(1-x)$ en 0^+

Applications

RZ1 **Exercice 22** Soit $f\colon x\mapsto \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
2. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0. Préciser la tangente de f en 0.

K20 **Exercice 23**
1. Rappeler la dérivée de arctan, et en déduire un $DL_5(0)$ de arctan.
2. Étudier l'asymptote oblique en $+\infty$ de $f(x)=x\sqrt{x+1}\arctan\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
3. On admet que $f(x)=x-\frac{5}{6}+\frac{169}{120x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Justifier la position de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

TIU **Exercice 24** Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$.

1. Pour $n>-a$, déterminer le module et un argument de $\left(1+\frac{z}{n}\right)$, puis de $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$
2. Montrer que $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$.

WHJ **Exercice 25** Soit $f\colon x\mapsto \frac{x}{\ln x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur lui-même.
2. ★ Montrer que $f^{-1}(x)\underset{+\infty}{\sim} x\ln x$. **Ind** : *Commencer par trouver un équivalent de* $\ln(f^{-1}(x))$.

08Q **Exercice 26** On rappelle que $H_n=\ln n+\gamma+o_{+\infty}(1)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $k_n=\min\{k\in\mathbb{N}\mid H_k\geq n\}$. Déterminer un équivalent de k_n.

F59 **Exercice 27** ★ Nombre de diviseurs de n On note d_n le nombre de diviseurs de n.

1. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} d_k$.
2. Montrer que pour tout $\alpha>0$, on a $d_n=o(n^\alpha)$.
   Indication : *Si $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_\ell^{\alpha_\ell}$, quel est le nombre de diviseurs de n, en fonction des α_i ?*

Suites

T60 **Exercice 28** [Banque CCP MP]

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que (v_n) soit non nulle à partir d'un certain rang et $u_n\sim v_n$.
   Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n=\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

C6R **Exercice 29** On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{\pi}{2}$ et $\forall n,\ u_{n+1}=\sin(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. a) Donner un équivalent de $u_{n+1}-u_n$.
   b) Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que la suite $u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle.
3. ★ En déduire un équivalent de u_n.

DRW **Exercice 30** Soit $n>1$ un entier. On considère le polynôme $P_n(x)=x^n-nx+1$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine x_n dans $[0,1]$ et une unique racine y_n dans $[1,+\infty[$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante. **Ind** : *Considérer* $P_{n+1}(x_n)$.
3. Montrer que $x_n\to 0$, puis trouver un équivalent de x_n.
4. Montrer que (y_n) converge vers une limite ℓ. Trouver un équivalent de $y_n-\ell$.

XRW **Exercice 31** On considère l'équation $\tan x=x$.

1. Montrer que pour tout entier n, cette équation a une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right[$. On la note x_n.
2. Trouver un équivalent simple de x_n.
3. On cherche maintenant un développement asymptotique de x_n.
   a) En utilisant la périodicité de la fonction tangente, montrer que $(x_n-n\pi)$ converge et trouver sa limite.
   b) ★ Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

U4I **Exercice 32** ★ Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue strictement croissante telle que $\forall x>0,\ f(x)<x$ et $f(x)\sim_0 x$. Soient $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ et $(a_n),(b_n)$ deux suites vérifiant $a_0=a$, $b_0=b$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=f(a_n)$ et $b_{n+1}=f(b_n)$. Montrer que $a_n\sim b_n$.